

# Наибольшая длина периода слова, задаваемого $n$ запретами

И.И. Богданов, Г.Р. Челноков

3 мая 2013 г.

## 1 Введение

Исследование комбинаторных свойств периодических последовательностей (слов) играет важную роль в проблемах бернсайдовского типа, см., например, [1, 2, 3].

Алгебра  $A = F\langle x_1, \dots, x_n \rangle / I$  называется *мономиальной*, если идеал  $I$  свободной алгебры  $F\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  порождён мономами. При изучении мономиальных алгебр важную роль играют алгебры вида  $A_u$ , где  $u$  — непериодичное слово: алгебра  $A_u$  задана соотношениями  $v = 0$ , где  $v$  пробегает множество всех слов, не являющихся подсловами в  $u^\infty$ , см. [3]. Алгебрами  $A_u$  исчерпывается класс первичных конечно определенных мономиальных PI-алгебр. В то же время, не все слова  $v$  необходимы для задания такой алгебры. Достаточно, например, ограничиться всеми словами длины, не превосходящей длины  $u$ .

Представляет интерес более точное исследование структуры соотношений, задающих  $A_u$ . В данной работе исследуется вопрос о возможной длине слова  $u$ , при котором алгебра  $A_u$  может быть задана  $n$  мономиальными соотношениями. Мы показываем (см. теорему 2.5), что в случае алфавита из двух букв наибольшая длина слова равен числу Фибоначчи  $F(n)$ .

Работа является продолжением статьи [4], в которой получены экспоненциальные оценки на длину слова  $u$ . Мы используем некоторые понятия и результаты из этой статьи.

Как авторам стало известно, в настоящее время П. Лавров предложил другое доказательство этого факта [5]. Было бы интересно сравнить методы доказательств.

## 2 Предварительные сведения

Пусть  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  — конечный алфавит (в большей части статьи мы полагаем  $k = 2$ ). Под *конечным* (бесконечным *вправо/влево/в обе стороны*) *словом* мы понимаем любую конечную (бесконечную *вправо/влево/в обе стороны*) последовательность букв алфавита; пустая последовательность  $\Lambda$  также является словом. *Длиной*  $|u|$  конечного слова  $u$  называется количество букв в нём. Все конечные слова образуют моноид относительно конкатенации.

**Определение 2.1.** Слово  $u$  называется *подсловом* слова  $w$ , если  $w = v_1 u v_2$  для некоторых слов  $v_1, v_2$ . Слово  $u$  является *началом* (концом) слова  $w$ , если  $v_1 = \Lambda$  ( $v_2 = \Lambda$ ). Подслово (начало, конец)  $u$  слова  $v$  является *собственным*, если  $u \neq v$ .

Введём на множестве конечных слов *частичный порядок*: скажем, что  $u \preceq v$ , если  $u$  является подсловом слова  $v$ .

Непустое слово  $u$  называется *периодическим*, если  $u = v^n$  для некоторого слова  $v$  и некоторого  $n \geq 2$ . В противном случае оно называется *непериодическим*.

**Определение 2.2** ([4]). Системой запретов назовём конечное множество слов  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  в алфавите  $X$ . Будем говорить, что (конечное или бесконечное) слово  $w$  удовлетворяет системе запретов  $V$ , если  $v \not\preceq w$  для любого  $v \in V$ .

<sup>1</sup>The work is supported by the Russian government project 11.G34.31.0053.

Пусть  $W$  — бесконечное в обе стороны слово. Будем говорить, что система запретов  $V$  определяет слово  $W$ , если  $W$  — единственное бесконечное слово, удовлетворяющее этой системе запретов.

Пусть  $u$  — конечное слово. Определим бесконечное слово с периодом  $u$  как  $u^\infty = \dots uuuu \dots$ . Если существует такое слово  $u$ , что  $W = u^\infty$ , то бесконечное слово  $W$  назовём *периодичным*. Нетрудно видеть, что если система запретов определяет слово  $W$ , то оно периодично.

Для каждого периодичного бесконечного в обе стороны слова  $W$  существует в определённом смысле оптимальная система запретов. Слово  $v$  назовём *каноническим запретом* для  $W$ , если  $v$  не является подсловом  $W$ , а любое его собственное подслово — является. Множество всех канонических запретов для  $W$  назовём *канонической системой запретов* для  $W$ ; она обозначается  $C(W)$ .

**Лемма 2.3** (см. [4, Лемма 1]). *Каноническая система запретов  $C(W)$  определяет слово  $W$ . При этом любая система запретов, задающая  $W$ , содержит не меньше элементов, чем  $C(W)$ .*  $\square$

**Замечание.** Можно показать также, что  $C(W)$  — единственная система запретов, задающая  $W$ , с минимальной возможной суммой длин входящих в неё слов.

Отметим ещё одно полезное свойство системы  $C(W)$ .

**Предложение 2.4.** *Конечное слово  $v$  удовлетворяет  $C(W)$  тогда и только тогда, когда  $v$  — подслово в  $W$ .*

*Доказательство.* Если  $v$  — подслово в  $W$ , то, очевидно, оно удовлетворяет  $C(W)$ . Обратно, предположим, что  $v$  не является подсловом в  $W$ . Тогда существует минимальное по длине подслово  $v' \preceq v$ , не являющееся подсловом  $W$ ; оно по определению лежит в  $C(W)$ . Значит,  $v$  не удовлетворяет  $C(W)$ .  $\square$

Определим числа Фибоначчи по следующему правилу:  $F(0) = F(1) = 1$ ,  $F(k+1) = F(k) + F(k-1)$ . Мы продолжим эту последовательность на отрицательные индексы; так,  $F(-1) = 0$ ,  $F(-2) = 1$ ,  $F(-3) = -1$ .

Цель данной статьи — нахождение точных верхних оценок на длину периода слова, если известна мощность системы запретов, его задающая. Основным результатом статьи является следующая теорема.

**Теорема 2.5.** *Пусть  $|X| = 2$ . Пусть система запретов  $V$  определяет слово  $W = u^\infty$ , где слово  $u$  неперiodично. Тогда  $|u| \leq F(|V|)$ .*

**Замечание.** В силу леммы 2.3 можно ограничиться случаем  $V = C(W)$ .

**Определение 2.6.** *Пусть слово  $u$  удовлетворяет системе запретов  $V$ , и  $x \in X$ . Назовём слово  $u' = ux$  ( $u' = xu$ ) продолжением слова  $u$  вправо (влево) относительно  $V$ , если  $u'$  также удовлетворяет  $V$ .*

*Слово  $u$  назовём неоднозначно продолжимым вправо (влево), если у него существуют хотя бы два разных продолжения вправо (влево).*

*Наконец, назовём  $u$  развилкой (относительно  $V$ ), если  $u$  неоднозначно продолжимо как вправо, так и влево. Кратностью развилки  $u$  назовём количество её продолжений вправо.*

*Назовём слово  $u$  развилкой относительно бесконечного в обе стороны слова  $W$ , если  $u$  является развилкой относительно  $C(W)$ . Само слово  $W$  также назовём развилкой относительно  $W$ .*

**Пример.** Пусть  $|X| = 2$ ,  $X = \{a, b\}$ . Тогда конечное слово  $u$  является развилкой относительно  $W$  тогда и только тогда, когда все четыре слова  $ua$ ,  $ub$ ,  $au$ ,  $bu$  являются подсловами в  $W$ . При этом все развилки имеют кратность 2. Стоит отметить, что слова  $aaa$ ,  $aub$ ,  $bua$ ,  $bub$

уже не обязательно являются подсловами в  $W$ ; с другой стороны, нетрудно видеть, что хотя бы два из них должны удовлетворять  $C(W)$ .

В работе [4] задача оценки количества запретов, задающих слово  $W$ , была сведена к задаче оценки количества развилок в слове  $W$ . Мы также будем использовать этот результат.

**Лемма 2.7** (см. [4, Лемма 3]). *Для каждого подслова  $u$  слова  $W$  существует наименьшая (относительно порядка  $\preceq$ ) развилка  $v = r(u)$ , содержащая  $u$ .*  $\square$

**Замечание.** Если  $v \preceq v'$  — подслова в  $W$ , то, очевидно,  $r(v) \preceq r(v')$ .

**Лемма 2.8** (см. [4, Лемма 5]). *Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — все конечные развилки в периодическом слове  $W = u^\infty$ , а  $k_1, \dots, k_n$  — их кратности. Тогда*

$$|C(W)| \geq 1 + (k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_n - 1).$$

**Следствие 2.9.**  $|C(W)| \geq n + 1$ .  $\square$

**Замечание.** Можно показать, что при  $|X| = 2$  в лемме 2.8 и в следствии 2.9 всегда достигается равенство.

Это следствие позволяет свести теорему 2.5 к следующей.

**Теорема 2.10.** *Пусть  $|X| = 2$ . Рассмотрим периодическое слово  $W = u^\infty$ , где слово  $u$  непериодично. Пусть для этого слова существует  $n$  конечных развилок. Тогда  $|u| \leq F(n + 1)$ .*

Именно этот вариант мы и доказываем в конце раздела 4.

В заключение приведём пример, показывающий, что оценка в теореме 2.5 (и, следовательно, в теореме 2.10) неумлучшаемы ни при каком  $n \geq 2$ .

**Пример.** Пусть  $X = \{a, b\}$ . Построим последовательности слов  $(s_i)$ ,  $(t_i)$  по следующему правилу. Положим  $s_0 = a$ ,  $t_0 = b$ ; далее, при всех  $i \geq 0$  положим  $s_{i+1} = s_i s_i t_i$ ,  $t_{i+1} = s_i t_i$ . Нетрудно видеть, что  $|s_i| = F(2i + 1)$ ,  $|t_i| = F(2i)$ . В работе [4, Теорема 3] показано, что при  $i \geq 1$  слово  $W_{2i} = (t_i)^\infty$  задаётся  $2i$  запретами; значит,  $|C(W_{2i})| \leq 2i$  по лемме 2.3. Тогда ясно, что слово  $W_{2i}$  показывает неумлучшаемость оценок в теоремах 2.5 и 2.10 при чётном  $n$ .

Аналогично можно показать, что при  $i \geq 1$  слово  $W_{2i+1} = (s_i)^\infty$  задаётся  $2i + 1$  запретом; это показывает неумлучшаемость оценок при нечётном  $n$ .

### 3 Комбинаторика

На протяжении этого и последующего разделов мы рассматриваем фиксированное непустое конечное непериодическое слово  $u$ , и слово  $W = u^\infty$ . Развилки и запреты относительно слова  $W$  мы называем просто развилками и запретами.

**Определение 3.1.** *Назовем значимостью  $z(v)$  подслова  $v$  количество раз, которое оно встречается на периоде; формально говоря, если  $u = u_1 \dots u_d$ , где  $u_1, \dots, u_d \in X$ , и  $|v| = t$ , то*

$$z(v) = |\{1 \leq i \leq d : u_i \dots u_{i+t-1} = v\}|,$$

где мы полагаем  $u_{t+d} = u_i$  при  $1 \leq i \leq d$ .

Напомним, что для подслова  $v$  слова  $W$  через  $r(v)$  обозначается наименьшая развилка, содержащая  $v$ .

**Предложение 3.2.** *Если  $v \preceq v'$ , то  $z(v) \leq z(v')$ . Кроме того,  $z(v) = z(r(v))$ .*  $\square$

**Предложение 3.3.** Пусть  $v$  — произвольная конечная развилка. Тогда

$$z(v) = \sum_{x \in X} z(vx) = \sum_{x \in X} z(r(vx)). \quad \square$$

Пусть  $v_0, v_1, \dots, v_n$  — все развилки, упорядоченные по значимости, то есть  $z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_n$ , где  $z_i = z(v_i)$ . При этом мы считаем, что  $v_0 = W$  (и  $z_0 = 1$ ), а  $v_n = \Lambda$  (и  $z_n = |u|$ ). Таким образом, наша цель — получить верхнюю оценку на  $z_n$ .

Из предложения 3.3 следует, что  $z_1 = z_0 + z_0 = 2$ . Из предложений 3.2 и 3.3 следует следующее предложение.

**Предложение 3.4.** Пусть  $x \in X$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Тогда  $z(v_i x) < z(v_i)$ . В частности, если  $r(v_i x) = v_j$ , то  $j < i$ . Наконец, из  $v_i \prec v_j$  следует  $z_i > z_j$ .  $\square$

Далее мы работаем со словами в алфавите  $X = \{a, b\}$ . В этом случае кратность каждой развилки равна 2. Из предложения 3.3 теперь вытекает следующее предложение.

**Предложение 3.5.**  $z_i \leq 2z_{i-1}$ , и  $\max\{r(v_i a), r(v_i b)\} \geq z_i/2$ .  $\square$

**Определение 3.6.** Назовем развилку  $v_i$  ( $i \geq 2$ ) исключительной, если  $z_i > z_{i-1} + z_{i-2}$ . В противном случае назовем  $v_i$  регулярной. Развилки  $v_0$  и  $v_1$  также будем считать регулярными. Индекс  $i$  назовем исключительным (регулярным), если развилка  $v_i$  исключительна (регулярна). Обозначим множество исключительных развилочек через  $\mathcal{I}$ .

Неформально говоря, в регулярных случаях последовательность  $(z_i)$  растет не быстрее чисел Фибоначчи.

**Предложение 3.7.** Если развилка  $v_i$  исключительна, то  $z_i = 2z_{i-1}$ ,  $z_{i-1} > z_{i-2}$ , и  $r(v_i a) = r(v_i b) = v_{i-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $r(v_i a) = r(v_i b) = v_{i-1}$ ; тогда  $z_i = 2z_{i-1}$ , и исключительность развилки  $v_i$  равносильна тому, что  $2z_{i-1} > z_{i-1} + z_{i-2}$ , то есть  $z_{i-1} > z_{i-2}$ . В противном случае можно считать, что  $r(v_i a) = v_j$  при  $j \leq i-2$ . Тогда по предложению 3.3  $z_i = z(v_i) = z(r(v_i a)) + z(r(v_i b)) \leq z_{i-2} + z_{i-1}$ , то есть  $v_i$  регулярна.  $\square$

**Замечание.** Исключительные развилки могут существовать. Например, в слове  $u^\infty$ , где  $u = (ababbabbabb)^n a$ , развилка  $v = babbabb$  исключительна при  $n \geq 2$ . Действительно, нетрудно проверить, что  $z(v) = 2n$ ,  $r(va) = r(vb) = ababbabbabbba = w$ ,  $z(w) = n$ ; значимость же любой другой развилки либо не меньше  $3n - 1$ , либо не больше  $n - 1$ .

Остаток этого раздела посвящён изучению исключительных развилочек.

**Определение 3.8.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$ . Пусть  $v_j$  — максимальное собственное начало развилки  $v_{i-1}$ , являющееся развилкой. Назовём развилку  $v_j$  и её индекс  $j$  штрафными для исключительной развилки  $v_i$  и её индекса  $i$ ; мы будем обозначать  $v_j = \Psi(v_i)$ .

**Замечание.** В принципе, определением не запрещена ситуация  $i = j$ ; но в дальнейшем мы увидим, что она невозможна, см. предложение 3.11.

Из предложения 3.3 вытекает

**Предложение 3.9.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$  и  $v_j = \Psi(v_i)$ . Тогда  $z_j \leq z_{j-1} + z_{i-1}$ .  $\square$

**Предложение 3.10.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$  и  $v_j = \Psi(v_i)$ , причём  $v_{i-1} = r(v_j a)$ . Тогда  $v_{i-1} \succeq v_j b$ .

*Доказательство.* Построим последовательность развилок  $(s_k)$  следующим образом. Положим  $s_0 = v_j$ ,  $s_1 = r(v_j b)$ ; заметим, что  $z(s_1) = z(r(v_j b)) = z(v_j) - z(r(v_j a)) = z(v_j) - z(v_{i-1}) \geq z(v_i)/2$ , так как  $z(v_j) \geq z(v_i) = 2z(v_{i-1})$ . При  $k \geq 1$  через  $s_{k+1}$  обозначим такую из развилок  $r(s_k a)$  и  $r(s_k b)$ , для которой  $z(s_{k+1}) \geq z(s_k)/2$ ; она существует согласно предложению 3.5 (по замечанию выше, неравенство  $z(s_{k+1}) \geq z(s_k)/2$  выполнено и при  $k = 0$ ). Заметим, что  $v_j b \preceq s_k$  при каждом  $k \geq 1$ .

Пусть  $k$  — максимальное число, для которого  $z(s_k) \geq z(v_{i-1})$ ; пусть  $s_k = v_m$ . Предположим, что  $m \neq i - 1$ . По предложению 3.7 имеем  $z_{i-2} < z_{i-1}$ ; значит, случай  $m < i - 1$  невозможен. Поэтому  $m \geq i$ , то есть  $z(s_k) \geq z_i = 2z_{i-1}$ . Но тогда  $z(s_{k+1}) \geq z(s_k)/2 \geq z_{i-1}$ , что противоречит выбору  $k$ . Итак,  $m = i - 1$ , поэтому  $v_{i-1} = s_k \succeq v_j b$ .  $\square$

**Предложение 3.11.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$  и  $v_j = \Psi(v_i)$ , причём  $v_{i-1} = r(v_j a)$ . Тогда существует такое  $k$  ( $i < k < j$ ), что  $z_k \leq z_{k-1} + z_{i-2}$  и  $z_k < z_j$ . В частности,  $j \geq i + 2$ , и развилка  $v_k$  регулярна. Кроме того, в канонической системе запретов существует запрет вида  $uv_k a$ , где  $u$  — буква.

*Доказательство.* Согласно определению слова  $v_j$  и предложению 3.10, слово  $v_{i-1}$  можно представить как  $v_{i-1} = v_j a t_1 = t_2 v_j b t_3$  для некоторых слов  $t_1, t_2, t_3$ . Слово  $t_2$ , очевидно, непусто; пусть  $x$  — его последняя буква,  $t_2 = t'_2 x$ . Поскольку  $v_{i-1} = r(v_j a)$ , любое вхождение  $v_j a$  в слово  $W$  продолжается до  $v_j a t_1 = v_{i-1}$ ; в частности, оно продолжается до  $t_2 v_j b$ . Это значит, что слово  $t_2 v_j a$  (начинающееся с  $v_j a$ ) не встречается в  $W$ .

Тогда слово  $t_2 v_j a = t'_2 x v_j a$  должно содержать некоторый запрет  $uv_k z$  из канонической системы (здесь  $u, z$  — буквы,  $v_k$  — некоторая развилка). Этот запрет не может быть подсловом слова  $t_2 v_j$ , ибо оно встречается в  $W$ . Также он не может являться подсловом слова  $x v_j a$ . Действительно, поскольку  $v_{i-1}$  является развилкой, слова  $av_{i-1}$  и  $bv_{i-1}$  встречаются в  $W$ ; значит, и их подслова  $av_j a$  и  $bv_j a$  также в нем встречаются и потому не могут содержать запретов.

Итак, наш запрет  $uv_k z$  не содержится в подсловах  $t_2 v_j$  и  $x v_j a$ . Это значит, что он является концом слова  $t_2 v_j a$ , строго содержащим  $x v_j a$ ; таким образом,  $z = a$ , а  $v_k = s' v_j$  для некоторого непустого слова  $s'$ . Рассмотрим теперь развилку  $v_\ell = r(v_k a)$ . Слово  $v_k a$  заканчивается на  $v_j a$ ; значит, развилка  $v_\ell$  должна содержать развилку  $r(v_j a) = v_{i-1}$ . Более того, согласно определению, слово  $v_j a$  является началом развилки  $v_{i-1}$  и находится не в начале развилки  $v_\ell$ ; значит,  $v_{i-1}$  — собственное подслово в  $v_\ell$ , то есть  $v_\ell \succ v_{i-1}$ . Поскольку и  $v_\ell$ , и  $v_{i-1}$  — развилки, получаем, что  $z(v_\ell) < z(v_{i-1})$  и  $\ell \leq i - 2$ .

Итого, мы нашли развилку  $v_k = s' v_j$  такую, что  $z(r(v_k a)) \leq z_{i-2}$ ; значит,  $z_k = z(v_k) = z(r(v_k a)) + z(r(v_k b)) \leq z_{i-2} + z_{k-1}$ . Заметим, что  $v_j \prec v_k \prec v_{i-1}$ , поэтому  $i - 1 < k < j$  и  $z_k = z(v_k) < z(v_j) = z_j$ . Кроме того,  $k \neq i$ , ибо  $z(r(v_i a)) = z_{i-1} > z_{i-2} \geq z_\ell = z(r(v_k a))$ . Значит,  $i < k < j$  (и, значит,  $j \geq i + 2$ ), и требуемое  $k$  найдено. Наконец, поскольку  $z_k \leq z_{k-1} + z_{i-2} < z_{k-1} + z_{i-1} \leq z_{k-1} + z_{k-2}$ , развилка  $v_k$  регулярна.  $\square$

**Определение 3.12.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$ ,  $v_j = \Psi(v_i)$ . Пусть  $v_k$  — развилка, построенная в предложении 3.11. Назовем эту развилку  $v_k$  и ее индекс  $k$  пeneвыми для исключительной развилки  $v_i$  и ее индекса  $i$ ; обозначим  $v_k = \Pi(v_i)$ .

Отметим некоторые свойства штрафных и пeneвых развилок.

**Предложение 3.13.** Пусть  $v_i \in \mathcal{I}$ ,  $v_j = \Psi(v_i)$  и  $v_{i-1} = r(v_j a)$ . Тогда  $z(r(v_j a)) < z(r(v_j b))$ . В частности, развилка  $v_j$  регулярна.

*Доказательство.* Первое утверждение следует из того, что  $r(v_j a) = v_{i-1}$ , а  $z(r(v_j a)) + z(r(v_j b)) = z(v_j) = z_j > z_k \geq z_i = 2z(r(v_j a))$ . Тогда  $v_j$  не исключительна по предложению 3.7.  $\square$

**Предложение 3.14.** Пусть  $v_i, v_{i'} \in \mathcal{I}$ ,  $v_j = \Psi(v_i)$ ,  $v_{j'} = \Psi(v_{i'})$ . Тогда, если  $i \neq i'$ , то и  $j \neq j'$ .

*Доказательство.* Предположим противное; пусть  $i > i'$  и  $v_{i-1} = r(v_j a)$ . Тогда из предложений 3.7 и 3.13 следует, что  $z_{i'-1} < z_{i-1} = z(r(v_j a)) < z(r(v_j b))$ , и потому  $v_{i'-1}$  не может являться  $r(v_j b)$ . Таким образом,  $v_{i'-1} = r(v_j a) = v_{i-1}$ , и  $i = i'$ . Противоречие.  $\square$

**Предложение 3.15.** Пусть  $v_i, v_{i'} \in \mathcal{I}$ ,  $v_k = \Pi(v_i)$ . Тогда  $v_k \neq \Psi(v_{i'})$ .

*Доказательство.* Пусть  $v_j = \Psi(v_i)$ , причём  $v_{i-1} = r(v_j a)$ . По предложению 3.11, в канонической системе запретов существует запрет вида  $uv_k a$ , где  $u$  — буква, при этом  $z(r(v_k a)) \leq z_{i-2}$ , а  $z(v_k) \geq z_i > 2z_{i-2}$ . Значит,  $z(r(v_k b)) = z(v_k) - z(r(v_k a)) > z(r(v_k a))$ . Поэтому, если развилка  $v_k = \Psi(v_{i'})$ , то по предложению 3.13  $v_{i'-1} = r(v_k a)$ , и  $v_k a$  является началом слова  $v_{i'-1}$  по определению штрафной развилки. Но поскольку  $v_{i'-1}$  является развилкой, то подслово  $uv_{i'-1}$  (и тем более  $uv_k a$ ) встречается в  $W$  и потому не может являться запретом — противоречие.  $\square$

Суммируем результаты предложений 3.9, 3.11, 3.13, 3.14 и 3.15 в следующей теореме.

**Теорема 3.16.** Для каждого исключительного индекса  $i$  существуют штрафной и пeneвой индексы  $j$  и  $k$  такие, что  $i < k < j$ ,  $z_j \leq z_{j-1} + z_{i-1}$  и  $z_k \leq z_{k-1} + z_{i-2}$ . При этом штрафные индексы для разных исключительных также различны, а пeneвой не может являться штрафным. Кроме того, штрафные и пeneвые индексы регулярны (т.е. не исключительны).  $\square$

**Определение 3.17.** Назовем индекс  $r$  рядовым, если он не является ни исключительным, ни штрафным, ни пeneвым.

## 4 Оценки

В этом разделе мы оцениваем рост последовательности  $(z_i)$ . Для этого мы сначала введём класс абстрактных (не обязательно связанных со словами) последовательностей, мажорирующих последовательности вида  $(z_i)$ , а затем будем оценивать эти последовательности.

### 4.1 Допустимые последовательности

**Определение 4.1.** Пусть  $n \geq 2$  — натуральное число. Пусть в множестве  $\{2, 3, \dots, n\}$  выделены три попарно непересекающихся подмножества  $I$ ,  $J$  и  $K$ ,  $|I| = |J| \geq |K|$  (элементы этих подмножеств будем называть соответственно исключительными, штрафными и пeneвыми; индекс, не лежащий ни в одном из подмножеств, назовем рядовым). Наконец, пусть вдобавок зафиксированы биекция  $\psi : I \rightarrow J$  и сюръекция  $\pi : I \rightarrow K$ , причем  $i < \pi(i) < \psi(i)$  для любого  $i \in I$ . Назовём набор  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$  системой. Для  $k \in K$  определим  $d(k) = \min \pi^{-1}(k)$ ; элементы множества  $d(K) \subseteq I$  назовём плохими для системы  $\mathcal{S}$ .

Самой простой системой является «пустая» система  $\mathcal{O}_n = (n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ .

Пусть  $\Pi = (x_i)_{i=0}^n$  — последовательность неотрицательных чисел. Будем говорить, что  $\Pi$  соответствует системе  $\mathcal{S}$ , если выполнено условие

(1) для любого  $2 \leq r \leq n$ ,  $x_r = x_{r-1} + x_{\theta(r)}$ , где

$$\theta(r) = \begin{cases} r-2, & \text{если } r \text{ — рядовой;} \\ r-1, & \text{если } r \text{ — исключительный;} \\ \psi^{-1}(r) - 1, & \text{если } r \text{ — штрафной;} \\ d(r) - 2, & \text{если } r \text{ — пeneвой.} \end{cases}$$

Ясно, что такая последовательность задаётся начальными членами  $x_0$  и  $x_1$ ; будем обозначать её  $\Pi_{\mathcal{S}}(x_0, x_1)$ .

Назовём последовательность  $\Pi_{\mathcal{S}}(a, b)$  допустимой для  $\mathcal{S}$ , если  $0 \leq a \leq b \leq 2a$ ; наконец, будем говорить, что последовательность  $\Pi_{\mathcal{S}} = \Pi_{\mathcal{S}}(1, 2)$  порождена системой  $\mathcal{S}$ .

Пусть теперь  $W = u^\infty$  — бесконечное периодичное слово, и  $(z_i)$  — последовательность значимостей, определённая в предыдущем разделе. Результаты этого раздела позволяют выписать порождённую последовательность, мажорирующую последовательность  $(z_i)$ . Именно, пусть индексы  $i_1 < \dots < i_m$  являются исключительными для слова  $W$ , индексы  $j_1, \dots, j_m$  — штрафными (причем  $j_t$  — штрафной для  $i_t$ ), а индексы  $k_1, \dots, k_s$  — пeneвыми (напомним, что пeneвой индекс может соответствовать нескольким исключительным). Положим  $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_m\}$ ,  $K = \{k_1, \dots, k_s\}$ ; по теореме 3.16 эти множества попарно не пересекаются. Далее, для всех  $1 \leq r \leq m$  положим  $\psi(i_r) = j_r$  и определим  $\pi(i_r)$  как пeneвой индекс, соответствующий исключительному  $i_r$ . Тогда  $(n, I, J, K, \psi, \pi)$  — система согласно теореме 3.16. Из этой же теоремы вытекает следующее предложение.

**Предложение 4.2.** Пусть последовательность  $(y_i)$  порождена системой  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$ . Тогда для любого индекса  $r = 0, \dots, n$  выполнено неравенство  $z_r \leq y_r$ .

*Доказательство.* Индукция по  $r$ . При  $r = 0, 1$  утверждение очевидно, так как  $z_r = y_r$ . Пусть  $z_s \leq y_s$  при всех  $s < r$ . Тогда по теореме 3.16 имеем  $z_r \leq z_{r-1} + z_{\theta(r)} \leq y_{r-1} + y_{\theta(r)} = y_r$ , что и требовалось.  $\square$

Отметим сразу некоторые свойства любой допустимой последовательности  $(y_i)$ , аналогичные свойствам последовательности  $(z_i)$  из предыдущего раздела.

**Предложение 4.3.** Пусть последовательность  $(y_i)$  соответствует системе  $\mathcal{S}$ . Тогда  $0 \leq y_i \leq y_{i+1}$  при всех  $1 \leq i \leq n$ . Если, вдобавок,  $(y_i)$  допустима для  $\mathcal{S}$ , то  $0 \leq y_i \leq y_{i+1} \leq 2y_i$  при всех  $0 \leq i < n$ .

*Доказательство.* Неравенство  $y_i \geq 0$  (и поэтому  $y_{i+1} \geq y_i$ ) следует из определения. Осталось доказать неравенство  $y_i \leq y_{i+1} \leq 2y_i$  для допустимой последовательности  $(y_i)$ . Применим индукцию по  $i$ . При  $i = 0$  все утверждения верны. Далее, при  $i \geq 1$  имеем  $y_{i+1} = y_i + y_r$  при некотором  $r = \theta(i+1) \leq i$ . По предположению индукции имеем  $0 \leq y_r \leq y_i$ , откуда  $y_i \leq y_i + y_r \leq 2y_i$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Напомним, что числа Фибоначчи заданы условиями  $F(0) = F(1) = 1$  и  $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$  при всех целых  $n$ .

**Предложение 4.4.** Пусть  $k \geq 2$ ,  $t \geq -1$ , и индексы  $k, k+1, \dots, k+t$  — рядовые. Тогда  $y_{k+t} = F(t+1)y_{k-1} + F(t)y_{k-2}$ .

*Доказательство.* Индукция по  $t$ . При  $t = -1, 0, 1$  имеем

$$y_{k-1} = F(0)y_{k-1} + F(-1)y_{k-2}, \quad y_k = F(1)y_{k-1} + F(0)y_{k-2}, \quad y_{k+1} = y_{k-1} + y_k = F(2)y_{k-1} + F(1)y_{k-2}.$$

Если же  $t \geq 2$ , то

$$y_{k+t} = y_{k+t-1} + y_{k+t-2} = (F(t) + F(t-1))y_{k-1} + (F(t-1) + F(t-2))y_{k-2} = F(t+1)y_{k-1} + F(t)y_{k-2},$$

что и требовалось.  $\square$

Пусть последовательность  $(x_i)$  порождена системой  $\mathcal{O}_n$ ; тогда, ясно,  $x_i = F(i+1)$  при всех  $0 \leq i \leq n$ . Наша цель — показать, что для любой порождённой последовательности  $y_0, \dots, y_n$  выполняется неравенство  $y_n \leq x_n = F(n+1)$ . С этой целью мы будем перестраивать систему  $(n, I, J, K, \psi, \pi)$ , сводя её к пустой, так, чтобы значение  $y_n$  не уменьшалось.

## 4.2 Элементарные улучшения порождённой последовательности

Здесь и далее, если не оговорено противное,  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$  — произвольная система, а  $y_0, \dots, y_n$  — последовательность, ею порождённая. Обозначим через  $L = I \cup J \cup K$  множество всех нерядовых индексов.

Каждый раз мы будем перестраивать систему  $\mathcal{S}$ , получая систему  $\mathcal{S}' = (I', J', K', \psi', \pi')$  и порождённую ею последовательность  $(y'_i)_{i=0}^n$ , для которой  $y'_n \geq y_n$  (функции  $d$  и  $\theta$ , а также множество  $L$  для системы  $\mathcal{S}'$  также будем помечать штрихами). Такую последовательность  $(y'_i)$  (систему  $\mathcal{S}'$ ) мы будем называть *улучшением* последовательности  $(y_i)$  (системы  $\mathcal{S}$ ). Достаточные условия для улучшения обеспечивает следующая лемма.

**Лемма 4.5** (об улучшении). *Пусть  $\ell \geq 2$ , и выполнены следующие условия:*

- (1) *из  $\theta(i) \geq \ell - 1$  следует  $\theta'(i) = \theta(i)$ ;*
- (2)  *$y'_{\ell-1} \geq y_{\ell-1}$ ,  $y'_\ell \geq y_\ell$ ;*
- (3)  *$y'_{\theta'(i)} \geq y_{\theta(i)}$  при всех  $i > \ell$  таких, что  $\theta(i) < \ell - 1$ .*

*Тогда  $y'_i \geq y_i$  при всех  $i \geq \ell - 1$ ; в частности,  $(y'_i)$  является улучшением  $(y_i)$ .*

*Доказательство.* Индукция по  $i$ . База для  $i = \ell - 1, \ell$  есть условие (2); пусть  $i > \ell$ . Если  $\theta(i) \geq \ell - 1$ , то  $y_i = y_{i-1} + y_{\theta(i)} \leq y'_{i-1} + y'_{\theta(i)} = y'_i$  по предположению индукции и условию (1). Если же  $\theta(i) < \ell - 1$ , то  $y_i = y_{i-1} + y_{\theta(i)} \leq y'_{i-1} + y'_{\theta(i)} = y'_i$  по предположению индукции и условию (3).  $\square$

В этом подразделе мы приведём несколько элементарных улучшений. Первые два из них можно схематично изобразить так:

$$\text{ИР} \dots \text{РН} \rightarrow \text{Р} \dots \text{РИН}; \quad \text{ИКР} \rightarrow \text{КРИ}, \quad \text{ИKN} \rightarrow \text{КИН},$$

где через И, Р, К, Н обозначены соответственно исключительный индекс, рядовой индекс, штрафной или пеневой индекс, нерядовой неплохой индекс (Напомним, что индекс плох, если он лежит в множестве  $d^{-1}(K)$ ).

**Предложение 4.6** (сдвиг исключительного индекса вправо). *Пусть  $r$  — исключительный индекс,  $a = \min\{t : r < t \in L\}$  — следующий за  $r$  нерядовой индекс. Пусть индекс  $\ell$  неплохой. Обозначим через  $I'$  множество, полученное из  $I$  заменой  $r$  на  $r' = \ell - 1$ . Соответственно изменим функции  $\psi$ ,  $\pi$ , полагая  $\psi'(r') = \psi(r)$ ,  $\pi'(r') = \pi(r)$ . Тогда система  $\mathcal{S}' = (n, I', J, K, \psi', \pi')$  — улучшение системы  $\mathcal{S}$ .*

*Доказательство.* При  $\ell = r + 1$  доказывать нечего; пусть  $\ell \geq r + 2$ . Очевидно, что после замены получается система. Напомним, что через  $(y'_i)_{i=0}^n$  мы обозначаем последовательность, порождённую  $\mathcal{S}'$ . Заметим, что  $y'_i = y_i$  при  $i < r$ . Положим  $t = \ell - r - 1 \geq 1$ .

Обозначим  $a = y_{r-2} = y'_{r-2}$ ,  $b = y_{r-1} = y'_{r-1}$ ; заметим, что  $b \leq 2a$  по предложению 4.3. Тогда  $y_r = 2b$ , и по предложению 4.4 получаем

$$y_{\ell-1} = y_{r+t} = F(t)y_r + F(t-1)y_{r-1} = (2F(t) + F(t-1))b = F(t+2)b.$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} y'_{\ell-2} &= y'_{r+t-1} = F(t)y_{r-1} + F(t-1)y_{r-2} = F(t)b + F(t-1)a \geq \\ &\geq F(t)b + \frac{F(t-1)}{2}b = \frac{F(t)}{2}b, \\ y'_{\ell-1} &= 2y'_{\ell-2} \geq F(t+2)b = y_{\ell-1}. \end{aligned}$$

Далее,  $y_\ell = y_{\ell-1} + y_{\theta(\ell)}$ ,  $y'_\ell = y'_{\ell-1} + y'_{\theta'(\ell)}$ . При этом, если  $\ell = \pi(r)$ , то  $y'_{\theta'(\ell)} = y'_{\ell-3} \geq y'_{r-2} = y_{r-2} = y_{\theta(r)}$ . Иначе  $\theta'(\ell) = \theta(\ell)$ , и либо  $\theta(\ell) = \ell - 1$ , либо  $\theta(\ell) \leq r - 1$ , ибо индексы  $r + 1, \dots, \ell - 1$  рядовые. В любом случае получаем  $y'_{\theta'(\ell)} \geq y_{\theta(\ell)}$ , а потому и  $y'_\ell \geq y_\ell$ .



Мы готовы проверить, что условия леммы 4.5 об улучшении выполнены, откуда будет следовать требуемое. Условие (2) уже проверено; условие (1) очевидно. Условие же (3) очевидно для всех  $i \notin \{\psi(r), d^{-1}(r), d^{-1}(\ell)\}$ , ибо тогда из  $\theta(i) < \ell - 1 \leq i - 2$  следует  $\theta(i) = \theta'(i) \leq r - 1$  и  $y_{\theta(i)} = y'_{\theta'(i)}$ . Рассмотрим оставшиеся случаи. При  $i = \psi(r) = \psi'(\ell - 1)$  имеем  $y'_{\theta'(i)} = y'_{\ell-2} \geq y'_{r-1} = y_{r-1} = y_{\theta(i)}$ . При  $i = d^{-1}(r)$  имеем  $y'_{\theta'(i)} = y'_{\ell-3} \geq y'_{r-2} = y_{r-2} = y_{\theta(i)}$ . Наконец, случай  $i = d^{-1}(\ell)$  невозможен, ибо  $\ell$  — неплохой, т.е.  $\ell \notin d(K)$ .  $\square$

**Замечание.** Подобную операцию замены одного индекса другим мы будем описывать многократно. В дальнейшем мы не будем описывать соответствующую замену функций  $\psi$ ,  $\pi$ , считая её подразумевающейся.

**Предложение 4.7** (перемена мест). *Пусть  $2 \leq r \leq n - 2$ ,  $r \in I$ ,  $r + 1 \in J \cup K$ , причём  $r + 1 \notin \{\psi(r), \pi(r)\}$ , а индекс  $r + 2$  — неплохой. Если  $r + 2$  — регулярный, то заменим в  $I$  индекс  $r$  на  $r + 2$ , а в  $J$  или в  $K$  — индекс  $r + 1$  на  $r$ . Иначе заменим в  $I$  индекс  $r$  на  $r + 1$ , а в  $J$  или в  $K$  — индекс  $r + 1$  на  $r$ .*

*Тогда полученная система  $\mathcal{S}'$  улучшает  $\mathcal{S}$ .*

*Доказательство.* Заметим сразу, что  $y_i = y'_i$  при  $i < r$ . Кроме того, условие  $r + 1 \notin \{\psi(r), \pi(r)\}$  гарантирует, что после замены получается система. Обозначим  $b = y_{r-1}$ ,  $p = y_{\theta(r+1)}$ . Возможны три случая.

1. Пусть индекс  $r + 2$  — регулярный. Тогда

$$\begin{aligned} y_r &= 2b, & y_{r+1} &= 2b + p, & y_{r+2} &= 4b + p, \\ y'_r &= b + p, & y'_{r+1} &= 2b + p = y_{r+1}, & y'_{r+2} &= 4b + 2p \geq y_{r+2}. \end{aligned}$$

Проверим условия леммы об улучшении при  $\ell = r + 2$ . Условие (1) очевидно, а (2) уже проверено. Условие (3) требует проверки лишь при  $i \in \{\psi(r), d^{-1}(r)\}$  (иначе  $\theta(i) = \theta'(i) < r$  и  $y_{\theta(i)} = y'_{\theta'(i)}$ ). Если  $i = \psi(r) = \psi'(r + 2)$ , то  $y'_{\theta'(i)} = y'_{r+1} \geq y'_{r-1} = y_{\theta(i)}$ . Если же  $r = d(i)$ , то  $y'_{\theta'(i)} = y'_r \geq y'_{r-2} = y_{\theta(r)}$ .

2. Пусть теперь индекс  $r + 2$  — исключительный и неплохой. Тогда

$$\begin{aligned} y_r &= 2b, & y_{r+1} &= 2b + p, & y_{r+2} &= 4b + 2p, \\ y'_r &= b + p, & y'_{r+1} &= 2b + 2p \geq y_{r+1}, & y'_{r+2} &= 4b + 4p \geq y_{r+2}. \end{aligned}$$

Опять проверим условия леммы об улучшении при  $\ell = r + 2$ . Условия (1) и (2) верны. Условие (3) требует проверки лишь при  $i \in \{\psi(r), d^{-1}(r)\}$  (напомним, что  $r + 2$  — неплохой); эта проверка производится аналогично предыдущему случаю.

3. Наконец, пусть индекс  $r + 2$  — штрафной или пeneвой. Обозначим  $q = y_{\theta(r+2)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} y_r &= 2b, & y_{r+1} &= 2b + p, & y_{r+2} &= 2b + p + q, \\ y'_r &= b + p, & y'_{r+1} &= 2b + 2p \geq y_{r+1}, & y'_{r+2} &= 2b + 2p + q \geq y_{r+2}. \end{aligned}$$

Проверка условий леммы об улучшении проводится аналогично первому случаю.  $\square$

**Следствие 4.8** (о разделении). *Пусть  $2 \leq p \leq q < n$ , причём  $q + 1$  — неплохой нерядовой индекс. Обозначим  $T = [p, q]$ . Предположим, что  $T \cap K = \emptyset$ , и все индексы из множества  $I \cap T$ , кроме, возможно, наименьшего из них — неплохие.*

*Тогда существует система  $\mathcal{S}' = (n, I', J', K', \psi', \pi')$ , улучшающая  $\mathcal{S}$ ; при этом  $\mathcal{S}$  и  $\mathcal{S}'$  отличаются лишь на отрезке  $T$  (формально говоря,  $I \setminus T = I' \setminus T$ ,  $J \setminus T = J' \setminus T$ ,  $K \setminus T = K' \setminus T$ , и  $\psi(i) = j \iff \psi'(i) = j$ ,  $\pi(i) = k \iff \pi'(i) = k$  для любых  $i, j, k \notin T$ ), и множество  $I' \cap T$  находится правее, чем  $J' \cap T$ . Более того,  $|I' \cap T| = |I \cap T|$ ,  $|J' \cap T| = |J \cap T|$ , и  $K' \cap T = \emptyset$ .*

*Доказательство.* Если  $I_1 = I \cap T$  уже находится правее  $J_1 = J \cap T$  (в частности, если одно из этих множеств пусто), то можно положить  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ . Иначе выберем

$$i_0 = \min I_1, \quad j = \min\{j \in J_1 : j > i_0\}, \quad i = \max\{i \in I_1 : i < j\}.$$

Тогда  $i$  можно заменить на  $j-1$  по предложению 4.6, а затем поменять их местами по одному из вариантов предложения 4.7. Последнее возможно, так как  $j+1$  не может быть плохим индексом по условию, а также  $\pi(i) > j$  (ибо  $I \cap K = \emptyset$ ). Поскольку сумма исключительных индексов строго возрастает, серией таких замен мы рано или поздно добьёмся требуемого.

Осталось заметить, что при каждой замене мощности множеств  $I \cap T$ ,  $J \cap T$  и  $K \cap T$  не менялись.  $\square$

Ещё одно преобразование связано только с изменением функции  $\psi$ , то есть с «переназначением» штрафных индексов.

**Предложение 4.9** (о переназначении двух штрафов). Пусть  $i_1 < i_2$  — некоторые исключительные индексы, а  $j_1 < j_2$  — соответствующие им штрафные (т.е.  $\psi(i_s) = j_s$  при  $s = 1, 2$ ), причём  $j_1 > \pi(i_2)$ . Изменим функцию  $\psi$  на элементах  $i_1, i_2$ , полагая  $\psi'(i_s) = j_{3-s}$  при  $s = 1, 2$ . Тогда получилась система  $\mathcal{S}'$ , являющаяся улучшением системы  $\mathcal{S}$ .

*Доказательство.* Условия  $i_1 < i_2 < \pi(i_2) < j_1 < j_2$  гарантируют, что  $\mathcal{S}'$  — система. Заметим, что  $y_t = y'_t$  при  $t < j_1$ . Обозначим  $a_s = y_{i_s-1} = y_{\theta(j_s)} = y'_{\theta'(j_{3-s})}$  при  $s = 1, 2$ ,  $\delta = a_2 - a_1 \geq 0$ . Тогда  $y'_{j_1} = y_{j_1-1} + a_2 = y_{j_1} + \delta$ . Непосредственная индукция показывает, что  $y'_t \geq y_t + \delta$  при  $j_1 \leq t < j_2$ . Тогда  $y'_{j_2} = y'_{j_2-1} + a_1 \geq y_{j_2-1} + a_1 + \delta = y_{j_2}$ . Тогда нетрудно видеть, что все условия леммы 4.5 об улучшении при  $\ell = j_2$  выполнены.  $\square$

**Следствие 4.10** (о переназначении штрафов). Пусть  $k \geq 2$ ,  $i_1 < \dots < i_k$  — некоторые исключительные индексы, а  $j_1 > \dots > j_k$  — штрафные индексы, причём  $\psi(\{i_1, \dots, i_k\}) = \{j_1, \dots, j_k\}$ . Изменим функцию  $\psi$  на элементах  $i_1, \dots, i_k$ , полагая  $\psi'(i_s) = j_s$  при  $s = 1, \dots, k$ . Тогда, если  $\mathcal{S}' = (n, I, J, K, \psi', \pi)$  — система, то  $\mathcal{S}'$  — улучшение системы  $\mathcal{S}$ .

*Доказательство.* Индукция по  $k$ . При  $k = 2$  это — предыдущее предложение. Пусть  $k > 2$ . Если  $\psi(i_k) = j_k$ , то можно непосредственно применить предположение индукции. Пусть теперь  $\psi(i_k) = j_s$  при  $s < k$ ; тогда  $j_k = \psi(i_t)$  при некотором  $t < k$ . Применим предложение 4.9 к индексам  $i_t, i_k, j_k, j_s$ . Поскольку  $\mathcal{S}'$  — система, то  $i_\ell < i_k < \pi(i_k) < j_k < j_s$ , поэтому при замене функции  $\psi$  переназначением  $\psi''(i_t) = j_s > j_k$ ,  $\psi''(i_k) = j_k$  также получается система  $\mathcal{S}''$ , являющаяся улучшением  $\mathcal{S}$ . Для неё опять можно применить предположение индукции, ибо  $\psi''(i_k) = j_k$ .  $\square$

**Замечание.** Для того, чтобы в условиях следствия 4.10  $\mathcal{S}'$  оказалась системой, достаточно, например, чтобы выполнялось условие  $|\pi(\{i_1, \dots, i_k\})| = 1$ .

### 4.3 Случай единственной пени

Разберём сначала случай, когда  $|K| = 1$ . В этом случае оказывается верна следующая лемма.

**Лемма 4.11.** Пусть последовательности  $(y_i)$  и  $(x_i)$  порождены системами  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$  и  $\mathcal{O}_n$  соответственно, причём  $2 \in I$ ,  $|K| = 1$  и  $x_n \geq y_n$ . Тогда для любых допустимых последовательностей  $\Pi_{\mathcal{O}_n}(a, b) = (x'_i)$  и  $\Pi_{\mathcal{S}}(a, b) = (y'_i)$  имеем  $x'_n \geq y'_n$ .

*Доказательство.* Обозначим  $(a_i) = \Pi_{\mathcal{O}_n}(1, 0)$ ,  $(b_i) = \Pi_{\mathcal{S}}(1, 0)$ ; пусть  $K = \{k\}$ . Заметим, что  $b_i = 0$  при  $i < k$ , поскольку при всех таких индексах  $\theta(i) > 0$ . Кроме того, поскольку  $k \geq 3$ , мы имеем  $a_k \geq 1 = b_k$  и  $a_{k+1} \geq 2 = b_k + b_0 = b_k + b_{\theta(k)} = b_{k+1}$ .

Далее, никакой индекс  $i \geq k$  — не исключительный. Покажем индукцией по  $i \geq k$ , что  $b_i \leq a_i$ . Действительно, при  $i = k$  и  $i = k + 1$  утверждение уже доказано; если же  $i \geq k + 2$ ,

то  $b_i = b_{i-1} + b_{\theta(i-1)}$ ; если  $\theta(i-1) \neq i-2$ , то  $b_{\theta(i-1)} = 0$  и  $b_i = b_{i-1} \leq a_{i-1} \leq a_i$ ; иначе  $b_i \leq b_{i-1} + b_{i-2} = a_{i-1} + a_{i-2} = a_i$ , что и требовалось.

Итак, мы получаем, что  $b_n \leq a_n$ . Наконец, заметим, что  $\Pi_{\mathcal{O}_n}(a, b) = (b/2)\Pi_{\mathcal{O}_n}(1, 2) + (a - b/2)\Pi_{\mathcal{O}_n}(1, 0)$  и  $\Pi_{\mathcal{S}}(a, b) = (b/2)\Pi_{\mathcal{S}}(1, 2) + (a - b/2)\Pi_{\mathcal{S}}(1, 0)$ , причём  $a - b/2 \geq 0$ , поскольку эти последовательности допустимы. Значит,

$$x'_n = (b/2)x_n + (a - b/2)a_n \geq (b/2)y_n + (a - b/2)b_n = y'_n,$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Определение 4.12.** Для числового множества  $X$  определим его сдвиг влево как  $X^- = \{x-1 : x \in X\}$ . Для числовой функции  $\phi$  определим её сдвиг влево формулой  $\phi^-(x) = \phi(x+1) - 1$ .

Пусть  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$  — система, в которой 2 — регулярный индекс. Определим её сдвиг влево как систему  $\mathcal{S}^- = (n-1, I^-, J^-, K^-, \psi^-, \pi^-)$ .

**Лемма 4.13.** Пусть  $\mathcal{S} = (n, I, J, K, \psi, \pi)$  — система с  $|K| = 1$ . Пусть  $(x_i) = \Pi_{\mathcal{S}}(a, b)$  и  $(y_i) = \Pi_{\mathcal{O}_n}(a, b)$  — допустимые последовательности. Тогда  $x_n \geq y_n$ .

*Доказательство.* Предположим противное; выберем из всех допустимых последовательностей  $\Pi_{\mathcal{S}}(a, b)$  (при всевозможных  $\mathcal{S}$ ,  $a$  и  $b$ ), противоречащих лемме, ту, для которой  $n$  минимально, а из таких — ту, для которой минимально  $|I|$ . Согласно лемме 4.11, можно считать, что  $a = 1$ ,  $b = 2$ . Если  $2 \notin I$ , то 2 — регулярный индекс. Значит, для последовательностей  $(x_{i+1})_{i=0}^{n-1} = \Pi_{\mathcal{S}^-}(b, a+b)$  и  $(y_{i+1})_{i=0}^{n-1} = \Pi_{\mathcal{O}_{n-1}}(b, a+b)$  утверждение леммы верно, то есть  $x_n \geq y_n$ , что не так. Итак,  $2 \in I$ .

Пусть  $K = \{k\}$ . Предположим, что  $I \neq \{2, 3, \dots, k-1\}$ . Положим  $i_0 = \min\{i \geq 2 : i \notin I\}$ ,  $j_0 = \min\{\ell \in L : \ell > i_0\}$ ,  $t = j_0 - i_0$ . По лемме 4.6, можно последовательно сдвинуть все индексы  $i_0 - 1, i_0 - 2, \dots, 2$  в индексы  $i_0 + t - 1, \dots, 2 + t$  соответственно, улучшив систему  $\mathcal{S}$ . При этом 2 не является исключительным для новой системы, что невозможно. Значит,  $I = \{2, \dots, k-1\}$ . Далее, согласно следствию 4.10 о переназначении штрафов, можно считать, что  $\psi(2) > \psi(3) > \dots > \psi(k-1)$ .

Предположим, что  $|I| \geq 2$ . Положим  $I' = (I \setminus \{2\})^-$ ,  $J' = (J \setminus \{\psi(2)\})^-$ ,  $K' = \{k-1\}$ ,  $\psi' = \psi^-|_{I'}$ ,  $\pi'(i) = k-1$  для всех  $i = 2, \dots, k-2$ . Тогда  $\mathcal{S}' = (n, I', J', K', \psi', \pi')$  — система; пусть  $(y'_i) = \Pi_{\mathcal{S}'}$ . Покажем, что  $y'_n \geq y_n$ ; это будет противоречить исходному выбору, ибо  $|I'| < |I|$ .

Положим  $t = \max J$ ,  $t' = \max J'$ ; тогда  $d = t - t' \geq 2$ . Положим  $\mathcal{S}'' = (t', I', J', K', \psi', \pi')$ . Пусть  $(a_i) = \Pi_{\mathcal{S}''} = (y'_i)_{i=0}^{t'}$ . Положим  $p = a_{t'-1}$ ,  $q = a_{t'}$ . Заметим, что  $p \geq 5$ ,  $q = a_{t'-1} + a_1 = p + 2 \geq 7$ . Тогда по предложению 4.4,  $y'_{t-1} = F(d-1)q + F(d-2)p$ ,  $y'_t = F(d)q + F(d-1)p$ . С другой стороны, имеем  $y_1 = 2$ ,  $y_2 = 4$ ; значит, отрезок последовательности  $(y_{i+1})_{i=0}^{t'}$  строится так же, как и  $\Pi_{\mathcal{S}''}(2, 4) = (2a_i)$ , за единственным исключением:  $y_k = y_{k-1} + 1$ , в то время как  $2a_{k-1} = 2a_{k-2} + 2$ . Тогда нетрудно видеть, что  $y_{t'} \leq 2p$ ,  $y_{t'+1} \leq 2q$ . Теперь, снова по предложению 4.4, получаем  $y_{t-1} \leq 2F(d-2)q + 2F(d-3)p$ . Тогда

$$y_t = y_{t-1} + y_1 \leq 2F(d-2)q + 2F(d-3)p + 2 \leq F(d)q + F(d-1)p = y'_t,$$

поскольку  $F(d) \geq 2F(d-2)$ ,  $F(d-1) \geq 2F(d-3)$ , причём хотя бы одно из этих неравенств строгое. Далее, пусть  $t < n$ ; покажем тогда, что  $y'_{t+1} \geq y_{t+1}$ . Поскольку  $q = p + 2$ , имеем

$$\begin{aligned} y'_{t+1} - y_{t+1} &= (y'_t + y'_{t-1}) - (y_t + y_{t-1}) \geq (F(d+1)q + F(d)p) - (4F(d-2)q + 4F(d-3)p + 2) = \\ &= (F(d+2) - 4F(d-1))p + 2(F(d+1) - 4F(d-2) - 1) = \\ &= (2F(d-2) - F(d-1))(p-2) + 2(2F(d-1) - F(d) - 1). \end{aligned}$$

Поскольку  $2F(d-2) \geq F(d-1)$  и  $2F(d-1) \geq F(d)$ , причём хотя бы одно из этих неравенств строгое, получаем  $y'_{t+1} - y_{t+1} \geq \min\{p-4, 0\} = 0$ . Итак,  $y_{t+1} \leq y'_{t+1}$ ,  $y_t \leq y'_t$ , откуда и следует, что  $y_n \leq y'_n$ .

Наконец, пусть  $|I| = 1$ . Тогда аналогично  $\mathcal{S}$  заменяется на пустую систему с увеличением последнего члена.  $\square$

#### 4.4 Общая оценка

Теперь мы готовы к доказательству общей оценки. Сначала докажем лемму, позволяющую сделать ключевой индукционный шаг с применением леммы 4.13.

Для каждого  $k \in K$  определим его *отрезок влияния*  $A(k) = [d(k), \max \psi(\pi^{-1}(k))]$ . Иными словами, отрезок влияния пеневго индекса  $k$  — это минимальный отрезок, содержащий все исключительные и штрафные индексы, соответствующие  $k$ . Назовём индекс  $k \in K$  *выделенным*, если на отрезке  $A(k)$  нет индексов, соответствующих другому пеневому индексу (иначе говоря,  $\pi(I \cap A(k)) = \pi(\psi^{-1}(J \cap A(k))) = K \cap A(k) = \{k\}$ ).

**Лемма 4.14** (о выделении). *Пусть  $|K| \geq 2$ . Тогда существует система  $\mathcal{S}'$ , улучшающая  $\mathcal{S}$ , такая, что в ней  $|K'| \leq |K|$ , причём либо в  $\mathcal{S}'$  существует выделенный пеневый индекс  $k_0$ , либо  $|K'| < |K|$ . При этом в первом случае имеем  $d(K) \cap [k_0, n] = \emptyset$ .*

*Доказательство.* Процесс улучшения будет проходить в несколько шагов. На каждом шаге мы будем улучшать систему, добиваясь выполнения некоторого свойства (своего для каждого шага). При этом это свойство будет сохраняться и при всех последующих шагах.

Пусть  $i_0 = \max d(K)$ ,  $k_0 = \pi(i_0)$ .

*Шаг 1.* Предположим, что существует пеневый индекс  $k$ , лежащий на интервале  $(i_0, k_0)$ . Переопределим функцию  $\pi$ , полагая  $\pi'(i) = k$  для всех  $i \in [i_0, k] \cap \pi^{-1}(k_0)$ . Из определения  $i_0$  следует, что значение  $d(k)$  не изменилось. Если после этого оказалось, что  $\pi'^{-1}(k_0) = \emptyset$ , то выкинем  $k_0$  из  $K$ . Нетрудно видеть, что получилась система, причём являющаяся улучшением исходной (все члены порождённой последовательности вплоть до  $k_0$ -го не изменились, последующие не уменьшились); при этом, если  $|K'| = |K|$ , то значение  $d(k_0)$  увеличилось. После нескольких таких шагов мы либо уменьшим  $|K|$  (тем самым добившись требуемого), либо добьёмся того, что  $(i_0, k_0) \cap K = \emptyset$ .

Итого, можно считать, что  $(i_0, k_0) \cap K = \emptyset$ .

*Шаг 2.* Переопределим функцию  $\pi$ , полагая  $\pi'(i) = k_0$  для всех  $i \in [i_0, k_0] \cap I$ . Получилась снова система, причём, поскольку множество  $(i_0, k_0] \cap I$  не содержит плохих индексов, порождённая последовательность не изменилась.

Итого, можно считать, что  $\pi([i_0, k_0] \cap I) = k_0$ .

*Шаг 3.* Рассмотрим отрезок  $T = [i_0, k_0 - 1]$ ; на нём нет пеневых индексов, а плохим является только индекс  $i_0$ . По следствию 4.8 о разделении можно так перестроить систему  $\mathcal{S}$  на отрезке  $T$ , что на отрезке  $T$  все штрафные индексы будут левее всех исключительных. При этом значение  $i_0$  может только увеличиться, а свойство шага 2 сохраняется.

Иными словами, можно считать, что  $[i_0, k_0] \cap J = \emptyset$ .

*Шаг 4.* Обозначим  $I_1 = [i_0, k_0] \cap I = \{i_0, \dots, i_t\}$  ( $i_0 < \dots < i_t$ ),  $J_1 = \psi(I_1)$ . По следствию 4.10 о переназначении штрафов, можно считать, что  $\psi(i_s) > \psi(i_r)$  при  $0 \leq s < r \leq t$ . Обозначим  $j_s = \psi(i_s)$  при  $0 \leq s \leq t$ .

*Шаг 5.* Предположим, что на отрезке  $[i_0, j_0]$  содержится ещё какой-то пеневый индекс  $k \neq k_0$  (тогда  $k > k_0$ ; мы выбираем  $k$  наименьшим возможным). Пусть  $s_0 = \max\{s : j_s > k\}$ . Тогда можно переопределить функцию  $\pi$  на элементах  $i_0, \dots, i_{s_0}$ , полагая  $\pi'(i_s) = k$  при  $0 \leq s \leq s_0$  (при этом, если  $s_0 = t$ , то надо ещё выкинуть  $k_0$  из  $K'$ , уменьшив тем самым  $|K|$ ; в противном случае будем иметь  $d'(k_0) = i_{s_0+1}$ ). При этом значение  $d(k)$  не изменится по выбору  $i_0$ . Нетрудно видеть, что получилась система, улучшающая исходную: члены порождённой последовательности вплоть до  $k_0$ -го не изменились, а дальнейшие не уменьшились.

При этом в изменённой системе (для новых значений  $i_0, k_0$ ) выполнено условие  $[i_0, j_0] \cap K = \{k_0\}$ .

*Шаг 6.* Пусть теперь  $J_1 = J \cap [k_0, j_0]$ . Покажем, что можно переназначить штрафы так, чтобы индексы  $j_0, \dots, j_t$  являлись минимальными индексами в  $J_1$  (иначе говоря, чтобы  $\{j_0, \dots, j_t\} = J \cap [k_0, j_0]$ ). Пусть это не так, то есть для некоторого  $0 \leq s \leq t$  существует  $j \in J \setminus \{j_0, \dots, j_t\}$  такой, что  $j < j_s$ ; пусть  $i = \psi^{-1}(j) < i_0$ . Можно считать, что  $s$  — максимальный индекс с этим

свойством, а  $j$  — минимальный для этого  $s$ . Тогда по предложению 4.9 о переназначении двух штрафов можно переназначить  $\psi'(i) = j_s$ ,  $\psi'(i_s) = j$ ; ясно, что получится система, причём в ней для индекса  $s$  уже не будет существовать таких  $j$ . Повторяя процедуру, в конце концов добьёмся требуемого. Заметим, что в процессе переназначений порядок элементов  $\psi(i_0), \dots, \psi(i_t)$  остаётся неизменным.

Итак, мы добились того, что  $\{j_0, \dots, j_t\} = [i_0, j_0] \cap J$  (напомним, что  $[i_0, k_0] \cap J = \emptyset$  уже после Шага 3).

*Шаг 7.* Предположим, наконец, что  $[i_0, j_0] \cap L \neq \{i_0, \dots, i_t, j_0, \dots, j_t, k_0\}$ ; по результатам предыдущих шагов, «лишними» элементами могут быть только исключительные индексы, лежащие на отрезке  $[k_0, j_0]$ . Тогда пенивые индексы, им соответствующие, больше  $j_0$ . Положим  $f_0 = \min\{f \in L : f > j_0\}$ . Из выбора  $i_0$  следует, что  $f_0$  — неплохой. Тогда по следствию 4.8 о разделении, существует улучшение  $\mathcal{S}'$  нашей системы, отличающееся от неё лишь на отрезке  $[k_0 + 1, f_0 - 1]$ , в котором уже  $\left[k_0, \max_{0 \leq s \leq t} \psi(i_s)\right] \cap I = \emptyset$ .

Суммируя предыдущие результаты, видим, что в полученной системе выполняется соотношение

$$[i_0, j_0] \cap L = \{i_0, \dots, i_t, j_0, \dots, j_t, k_0\}.$$

Таким образом, индекс  $k_0$  в ней является выделенным. Кроме того, по определению  $i_0$ , мы имеем  $d(K) \cap [k_0, n] = \emptyset$ .  $\square$

**Теорема 4.15.**  $y_n \leq F(n + 1)$ .

*Доказательство.* Индукция по  $|K|$ . При  $|K| = 0$  доказывать нечего, при  $|K| = 1$  утверждение следует из леммы 4.13.

Пусть  $|K| \geq 2$ . Применяя лемму 4.14 о выделении, мы либо уменьшим  $|K|$  (после чего применимо предположение индукции), либо получим систему с тем же значением  $|K|$ , в которой некоторый пенивой индекс  $k_0$  — выделенный. Полученную систему опять будем обозначать через  $\mathcal{S}$ .

Итого, пусть индекс  $k_0 \in K$  выделен. Пусть  $\mathcal{S}' = (n, I', J', K', \psi', \pi')$ , где

$$K' = K \setminus \{k_0\}, \quad I' = I \setminus \pi^{-1}(k_0), \quad J' = J \setminus \psi(\pi^{-1}(k_0)), \quad \psi' = \psi|_{I'}, \quad \pi' = \pi|_{I'};$$

нетрудно видеть, что  $\mathcal{S}'$  — система. Пусть  $(y'_i)$  — последовательность, порождённая  $\mathcal{S}'$ . Поскольку  $|K'| = |K| - 1$ , по предположению индукции  $y'_n \leq F(n + 1)$ . Для завершения доказательства достаточно доказать, что  $\mathcal{S}'$  улучшает  $\mathcal{S}$ .

Положим

$$I_0 = \pi^{-1}(k_0), \quad i_0 = \min I_0, \quad J_0 = \psi(I_0), \quad j_0 = \max J_0.$$

Заметим, что  $y'_i = y_i$  при  $i < i_0$ . Пусть  $j$  — максимальный индекс такой, что все индексы из полуинтервала  $(j_0, j]$  — рядовые (таким образом, если  $j_0 = \max L$ , то  $j = n$ , иначе  $j = \min\{j \in L : j > j_0\} - 1$ ).

Неформально говоря, поскольку индекс  $k_0$  — выделенный, последовательность  $(y_i)$  ведёт себя на отрезке  $[i_0, j]$  в точности как последовательность, допустимая для «сдвинутой» системы  $(j - i_0 + 2, I_0, J_0, K_0, \psi|_{I_0}, \pi|_{I_0})$ . Формализуем это утверждение.

Положим  $i_* = i_0 - 2$ . Определим систему  $\mathcal{S}_1 = (j - i_*, I_1, J_1, K_1, \psi_1, \pi_1)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_0 - i_*, & J_1 &= J_0 - i_*, & K_1 &= \{k_0 - i_*\}, \\ \psi_1(i - i_*) &= \psi(i) - i_*, & \pi_1(i - i_*) &= \pi(i) - i_*. \end{aligned}$$

Пусть  $(x_i)_{i=0}^{j-i_*} = \Pi_{\mathcal{S}_1}(y_{i_*}, y_{i_*+1})$ . Тогда непосредственная индукция показывает, что  $x_i = y_{i+i_*}$  при всех  $0 \leq i \leq j - i_*$ , ибо оба члена получаются из предыдущих по одинаковым правилам.

Аналогично, если  $(x'_i)_{i=0}^{j-i_*}$  — допустимая последовательность для пустой системы с теми же начальными условиями, то  $x'_i = y'_{i+i_*}$  при всех  $0 \leq i \leq j - i_*$ . По следствию 4.13, имеем теперь  $y_j = x_{j-i_*} \leq x'_{j-i_*} = y'_j$ . Если  $j = n$ , то это и есть требуемое неравенство.

Пусть, наконец,  $j < n$ . Покажем, что последовательности  $(y_i)$  и  $(y'_i)$  удовлетворяют условиям леммы 4.5 об улучшении при  $\ell = j + 1$ . Заметим, что  $y_{j+1} = y_j + y_{\theta(j+1)}$ ,  $y'_{j+1} = y'_j + y'_{\theta'(j+1)}$ , причём индекс  $\theta = \theta(j + 1) = \theta'(j + 1)$  либо равен  $j$  (если  $j + 1 \in I$ ), либо не превосходит  $i_0 - 1$ . Значит,  $y_{\theta(j+1)} \leq y'_{\theta(j+1)}$ , откуда следуют условия (2). Напомним, что из утверждения леммы 4.14 вытекает, что индекс  $j + 1$  неплохой.

Далее, при любом  $i \geq j + 1$  имеем  $\theta = \theta(i) = \theta(i)'$ , что доказывает (1). Кроме того, при этих же значениях  $i$  либо  $\theta(i) \geq j$ , либо  $\theta(i) \leq i_0 - 1$  (это следует из того, что  $j + 1$  — неплохой, а  $k_0$  — выделенный). Поэтому условие (3) также выполнено, ибо  $y_s = y'_s$  при  $s \leq i_0 - 1$ .

Итак, по лемме об улучшении  $y_n \leq y'_n$ , что и требовалось доказать.  $\square$

Теперь мы можем доказать основную теорему.

**Доказательство теоремы 2.10.** Пусть  $v_1, \dots, v_n$  — все развилки в слове  $W$ , упорядоченные по неубыванию значимости,  $z_i = r(v_i)$ . По предложению 4.2,  $z_n \leq y_n$  для некоторой порождённой последовательности  $(y_i)_{i=0}^n$ . По теореме 4.15,  $y_n \leq F(n+1)$ . Значит, и  $|u| = z_n \leq F(n+1)$ , что и требовалось доказать.  $\square$

## 5 Алфавит из произвольного количества букв

### Список литературы

- [1] В.А. Уфнаровский. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // ВИНТИ, 1990 Сер. Совр. пробл. Математики. Фундаментальные направления. Т.57. М. С.5 — 177
- [2] А.Г. Курош. Проблеммы теории колец, связанные с проблемой Бернсайда о периодических группах //Изв. АН СССР сер. мат. 1941. Т.5. С. 233 — 240
- [3] А.Я. Белов, В.В. Борисенко, В.Н. Латышев. Мономиальные алгебры //ВИНТИ, 2002. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т.26. М. С.35 — 214
- [4] Г.Р. Челноков. О числе запретов, задающих периодическую последовательность. // Модел. и анализ информ. систем. Т. 13, № 3 (2007), 66–70.
- [5] P. Lavrov. Number of restrictions required for periodic words in finite alphabet. arXiv:1209.0220.